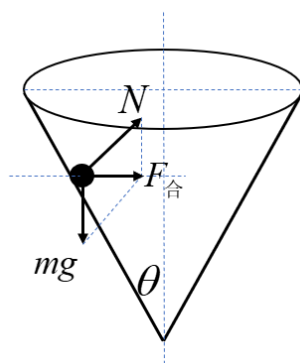


水平面内的圆周运动之圆锥筒

一、基础受力分析求运动参数



考法说明：已知圆锥筒的半顶角 θ 、内壁光滑，分析物体做圆周运动的角速度 ω 、线速度 v 或支持力 N 。

核心公式：

$$N = \frac{mg}{\sin \theta}$$

$$F_n = \frac{mg}{\tan \theta} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

若小球距离圆锥顶点的高度为 h ，则有 $r = h \cdot \tan \theta$

若内壁不光滑，动摩擦因数为 μ ，则有：

- 竖直方向平衡： $N \cos \theta \pm f \sin \theta = mg$ (“+”为摩擦力向下，“-”为摩擦力向上)。
- 水平方向向心力： $N \sin \theta \pm f \cos \theta = m\omega^2 r$

二、临界角速度问题

考法说明：物体在圆锥筒内不滑动的临界条件（最大或最小角速度），需考虑最大静摩擦力方向。

核心公式：

- **最小角速度**（防止下滑）：摩擦力向上，方程：

$$N \cos \theta + \mu N \sin \theta = mg$$

$$N \sin \theta - \mu N \cos \theta = m\omega_{\min}^2 r$$

- **最大角速度** (防止上滑): 摩擦力向下, 方程:

$$N \cos \theta - \mu N \sin \theta = mg$$

$$N \sin \theta + \mu N \cos \theta = m\omega_{\max}^2 r$$

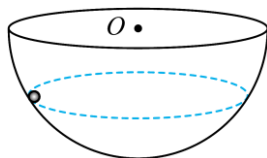
- 根据角速度大小判断摩擦力的方向 (向上或向下)。

若 $\omega < \omega_{\min}$, 物体有下滑趋势, 摩擦力向上。

若 $\omega > \omega_{\max}$, 物体有上滑趋势, 摩擦力向下。

典型例题

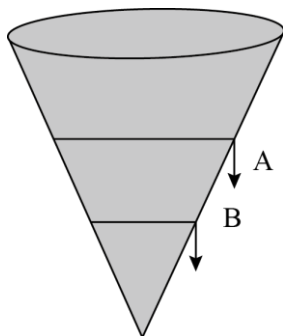
1. 如图所示, 光滑容器内壁上有一小球在水平面内做匀速圆周运动. 关于小球的受力, 下列说法正确的是 ()



- | | |
|------------------|----------------------|
| A. 小球受重力、向心力 | B. 小球受到的合力为零 |
| C. 小球受重力、容器壁的支持力 | D. 小球受重力、容器壁的支持力和向心力 |

【答案】 C

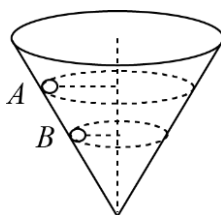
2. (多选) 如图所示, 一个内壁光滑的圆锥筒, 其轴线垂直于水平面, 圆锥筒固定在水平地面不动. 有两个质量均为 m 的小球 A 和小球 B 紧贴着筒内壁在水平面内做匀速圆周运动, 小球 B 所在高度为小球 A 所在的高度一半. 下列说法正确的是 ()



- A. 小球A、B所受的支持力大小之比为 2:1 B. 小球A、B的加速的大小之比为 1:1
 C. 小球A、B的角速度之比为 $\sqrt{2}:1$ D. 小球A、B的线速度之比为 $\sqrt{2}:1$

【答案】 BD

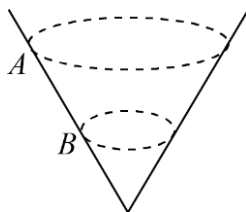
3. (多选) 如图所示，内壁光滑的圆锥筒的轴线垂直于水平面，圆锥筒固定不动，两个质量相同的小球A和B紧贴着内壁分别在图中所示的水平面内做匀速圆周运动，则 ()



- A. 球A的角速度一定大于球B的角速度
 B. 球A的线速度一定大于球B的线速度
 C. 球A的向心力（向心加速度）一定小于球B的向心力（或向心加速度）
 D. 球A对筒壁的压力一定大于球B对筒壁的压力
 E. 球A的周期一定大于球B的周期

【答案】 BE

4. 如图所示，一个内壁光滑的圆锥筒的轴线垂直于水平面，圆锥筒固定不动，有两个质量分别为 $2m$ 和 m 的小球A、B紧贴着内壁分别在图中所示的水平面内做匀速圆周运动，则下列说法正确的是 ()

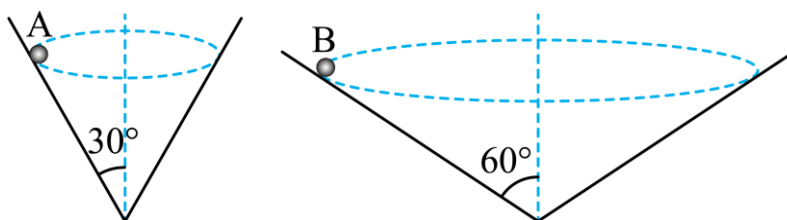


- A. 球A的线速度小于球B的线速度
 B. 球A的角速度大于球B的角速度
 C. 球A的运动周期小于球B的运动周期

D.球A对筒壁的压力大小是球B对筒壁的压力大小的2倍

【答案】 D

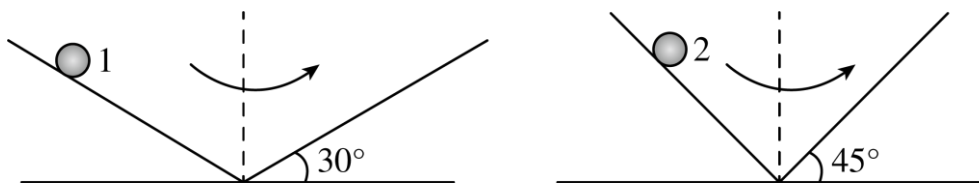
5. 如图所示，两个圆锥内壁光滑，竖直放置在同一水平面上，圆锥母线与竖直方向夹角分别为 30° 和 60° ，有 A、B 两个质量相同的小球在两圆锥内壁等高处做匀速圆周运动，下列说法正确的是（ ）



- A. A、B 球受到的支持力之比为 $\sqrt{3}:3$ B. A、B 球的向心力之比为 $\sqrt{3}:1$
 C. A、B 球运动的角速度之比为 $3:1$ D. A、B 球运动的线速度之比为 $1:3$

【答案】 C

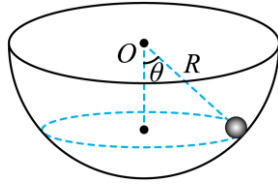
6. (多选) 如图所示，两个可视为质点的相同小球 1、2 分别在两竖直光滑圆锥的内侧面上以相同的角速度做匀速圆周运动。已知两圆锥面与水平面的夹角分别为 30° 和 45° ，重力加速度为 g ，则下列说法正确的是（ ）



- A. 球1和球2的向心加速度大小之比为 $1:\sqrt{3}$ B. 球1和球2做圆周运动的半径之比为 $1:1$
 C. 球1和球2的线速度大小之比为 $1:\sqrt{2}$ D. 球1和球2离地面的高度之比为 $1:3$

【答案】 AD

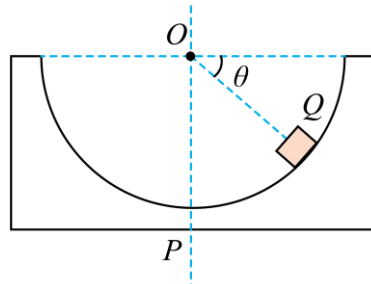
7. 内表面为半球型且光滑的碗固定在水平桌面上，球半径为 R ，球心为 O ，现让可视为质点的小球在碗内的某一水平面上做匀速圆周运动，小球与球心 O 的连线与竖直线的夹角为 θ ，重力加速度为 g ，则（ ）



- A. 小球的加速度为 $a = g \sin \theta$ B. 碗内壁对小球的支持力为 $N = \frac{mg}{\sin \theta}$
- C. 小球的运动周期为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{R \cos \theta}{g}}$ D. 小球运动的线速度为 $v = \sqrt{gR \tan \theta}$
- E. 小球合外力恒定不变
- F. 若小球运动的线速度为 v ，则其向心加速度大小为 $a_n = \frac{v^2}{R}$

【答案】 C

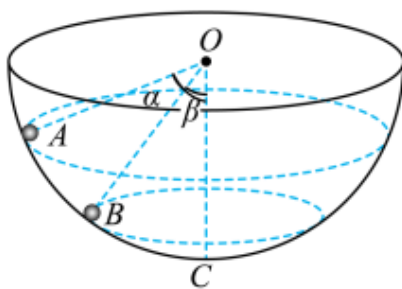
8. 如图所示，内壁光滑的半球形容器对称轴 OP 竖直， O 为圆心，半径为 R 。质量为 m 的小物块放置在容器内 Q 点，随容器一起绕竖直轴 OP 以角速度 ω 匀速转动。已知 OQ 连线与水平方向的夹角为 θ ，重力加速度为 g ，下列说法正确的是（ ）



- A. 容器对小物块的弹力大小为 $mg \tan \theta$ B. 容器对小物块的弹力大小为 $\frac{mg}{\sin \theta}$
- C. 容器对小物块的弹力大小为 $m\omega^2 R$ D. 小物块的向心加速度大小为 $\omega^2 R$

【答案】 BC

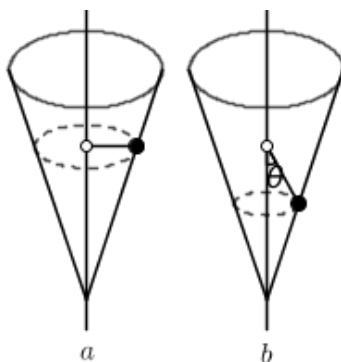
9. 如图有一固定且内壁光滑的半球形容器，球心为 O ，最低点为 C ，在其内壁上有两个质量相同的小球（可视为质点）A 和 B，在两个高度不同的水平面内做匀速圆周运动，A 球的轨迹平面高于 B 球的轨迹平面。A、B 两球与 O 点的连线与竖直线 OC 间的夹角分别为 $\alpha = 53^\circ$ 和 $\beta = 37^\circ$ ， $\sin 37^\circ = 0.6$ ， $\cos 37^\circ = 0.8$ ，则（ ）



- A. A、B 两球所受弹力的大小之比为 3 : 4 B. A、B 两球运动的角速度之比为 4 : 3
 C. A、B 两球运动的周期之比为 4 : 3 D. A、B 两球的转速之比为 $2:\sqrt{3}$
 E. A、B 两球的线速度之比为 $8\sqrt{3}:9$

【答案】 DE

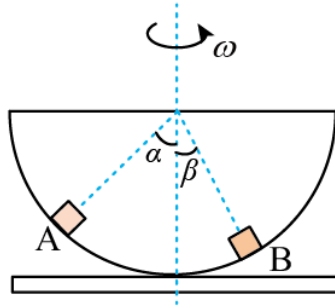
10. (多选)在光滑圆锥形容器中，固定了一根光滑的竖直细杆，细杆与圆锥的中轴线重合，细杆上穿有小环（小环可以自由转动，但不能上下移动），小环上连接一轻绳，与一质量为 m 的光滑小球相连，让小球在圆锥内做水平面上的匀速圆周运动，并与圆锥内壁接触。如图所示，图 a 中小环与小球在同一水平面上，图 b 中轻绳与竖直轴成 θ ($\theta < 90^\circ$) 角。设图 a 和图 b 中轻绳对小球的拉力分别为 T_a 和 T_b ，圆锥内壁对小球的支持力分别为 N_a 和 N_b ，则在下列说法中正确（ ）



- A. T_a 一定为零， T_b 一定为零 B. T_a 、 T_b 是否为零取决于小球速度的大小
 C. N_a 一定不为零， N_b 可以为零 D. N_a 、 N_b 的大小与小球的速度无关

【答案】 BC

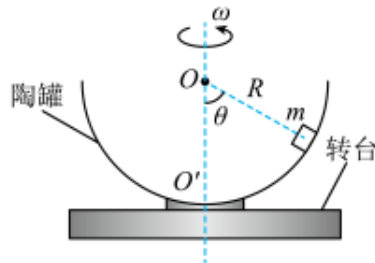
11. (多选)如图，半径为 R 的半球形容器固定在水平转台上，转台绕过容器球心 O 的竖直轴线以角速度 ω 匀速转动。质量相等的小物块 A、B 随容器转动且相对器壁静止。A、B 和球心 O 点连线与竖直方向的夹角分别为 α 、 β ， $\alpha > \beta$ ，则下列说法正确的是（ ）



- A. A 的速度变化比 B 快
- B. A、B 受到的摩擦力可能同时为 0
- C. 若 B 不受摩擦力，则 A 受沿容器壁向上的摩擦力
- D. 若 ω 缓慢增大，则 A、B 受到的摩擦力一定都增大

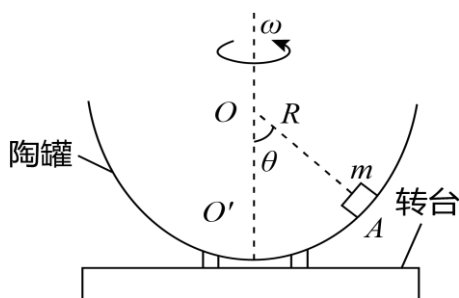
【答案】 AC

12. 如图所示，半径为 R 的半球形陶罐，固定在可以绕竖直轴旋转的水平转台上，转台转轴与过陶罐球心 O 的对称轴 OO' 重合。转台以一定角速度 ω 匀速转动，一质量为 m 的小物块落入陶罐内，经过一段时间后，小物块随陶罐一起转动且相对罐壁静止，它和 O 点的连线与 OO' 之间的夹角 θ 为 60° 。重力加速度大小为 g 。若 $\omega = \omega_0$ ，小物块受到的摩擦力恰好为零，求 ω_0 ；



【答案】 $\sqrt{\frac{2g}{R}}$

13. 如图所示，半径为 $R = 0.5\text{ m}$ 的半球形陶罐，固定在可以绕竖直轴旋转的水平转台上，转台转轴与过陶罐球心 O 的对称轴 OO' 重合。转台静止不转动时，将一质量为 $m = 2\text{ kg}$ 、可视为质点的小物块放入陶罐内，小物块恰能静止于陶罐内壁的 A 点，且 A 点与陶罐球心 O 的连线与对称轴 OO' 成 $\theta = 37^\circ$ 角。重力加速度 $g = 10\text{ m/s}^2$ ， $\sin 37^\circ = 0.6$ ，最大静摩擦力等于滑动摩擦力。则：



(1)物块与陶罐内壁之间的动摩擦因数为多少?

(2)若转台转动的角速度为 $\sqrt{30}\text{rad/s}$,物块仍在陶罐中的A点随陶罐一起转动,则陶罐给物块的弹力和摩擦力大小为多少?

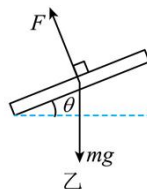
【答案】(1) 0.75

(2)26.8N, 2.4N

14. 火车转弯模型同样可以用来解释飞机盘旋时倾斜的问题.如图甲所示,飞机盘旋时空气对飞机的升力与机翼平面垂直,飞机受到的升力与重力的合力提供飞机盘旋时所需的向心力,其模型可简化为图乙.某架飞机在水平面内做半径为 R 的匀速圆周运动时,机翼平面与水平方向的夹角为 θ (大小未知),飞机在 t 时间内运动的路程为 s .已知飞机的质量为 m ,重力加速度大小为 g ,求:



甲



乙

(1)飞机的角速度 ω 和向心加速度大小 a_n ;

(2)飞机机翼平面与水平方向的夹角的正切值 $\tan \theta$;

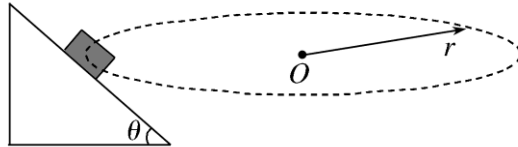
(3)飞机受到的升力大小 F .

【答案】(1) $\omega = \frac{s}{Rt}$, $a_n = \frac{s^2}{Rt^2}$;

(2) $\tan \theta = \frac{s^2}{gRt^2}$;

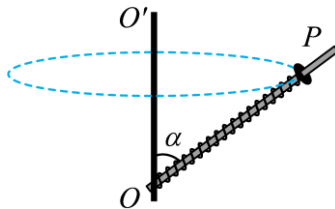
(3) $F = m\sqrt{g^2 + \frac{s^4}{R^2t^4}}$

15. 汽车试车场中有一个检测汽车在极限状态下的车速的试车道，试车道呈锥面（漏斗状），侧面图如图所示。测试的汽车质量 $m = 1\text{ t}$ ，车道转弯半径 $r = 150\text{ m}$ ，路面倾斜角 $\theta = 45^\circ$ ，路面与车胎的动摩擦因数 μ 为 0.25 ，设路面与车胎的最大静摩擦力等于滑动摩擦力， g 取 10 m/s^2 ，求：(1)若汽车恰好不受路面摩擦力，则其速度应为多大？(2)汽车在该车道上所能允许的最小车速。



【答案】 (1) $v \approx 38.7\text{ m/s}$; (2) $v_{\min} = 30\text{ m/s}$

16. 一种离心测速器的简化工作原理如图所示。细杆的一端固定在竖直转轴 OO' 上的 O 点，并可随轴一起转动。杆上套有一轻质弹簧，弹簧一端固定于 O 点，另一端与套在杆上的圆环相连。当测速器稳定工作时，圆环将相对细杆静止，通过圆环的位置可以确定细杆匀速转动的角速度。已知细杆长度 $L = 0.2\text{ m}$ ，杆与竖直转轴的夹角 α 始终为 60° ，弹簧原长 $x_0 = 0.1\text{ m}$ ，弹簧劲度系数 $k = 100\text{ N/m}$ ，圆环质量 $m = 1\text{ kg}$ ；弹簧始终在弹性限度内，重力加速度大小取 10 m/s^2 ，摩擦力可忽略不计。



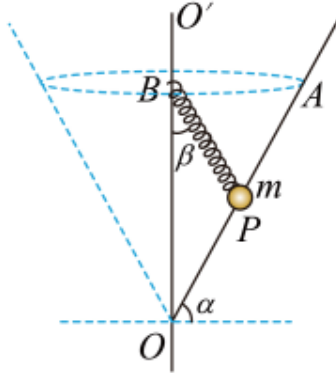
- (1)若细杆和圆环处于静止状态，求圆环到 O 点的距离。
 (2)求弹簧处于原长时，细杆匀速转动的角速度大小。
 (3)求圆环处于细杆末端 P 时，细杆匀速转动的角速度大小。

【答案】 (1) 0.05 m

(2) $\frac{10\sqrt{6}}{3}\text{ rad/s}$

(3) 10 rad/s

17. 如图所示，在竖直轴 OO' 的 B 点套有不可上下滑动，只可以绕轴无摩擦转动的轻环，轻弹簧的上端与该环相连，光滑杆 OA 与水平面间的夹角 $\alpha = 60^\circ$ ，质量为 m 的小球套在光滑杆 OA 上并与弹簧的下端连接，已知轴 OB 间距为 L 。



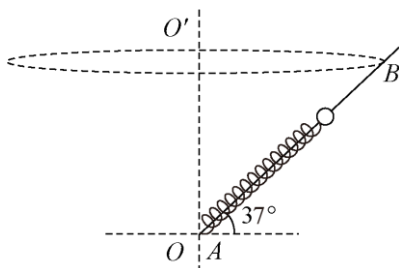
- (1) 保持杆不动，小球在图示 P 点位置处于静止状态，图示 $\beta = 30^\circ$ ，求小球所受弹簧的弹力大小 T 和所受杆的弹力大小 N ；
- (2) 保持光滑杆 OA 与水平面间的夹角始终为 α ，使小球随杆 OA 一起由静止绕 OO' 轴加速转动，小球缓慢运动到与 B 点在同一水平面的 A 点时，杆 OA 匀速转动，小球与杆保持相对静止，求此时杆 OA 绕 OO' 轴转动的角速度大小 ω ；
- (3) 在 (2) 情形之下，小球由 P 点开始相对杆向上滑动到 A 点与杆相对静止的过程中，杆对球所做的功 W 。

【答案】 (1) $\sqrt{3}mg$, mg ;

(2) $\sqrt{\frac{6g}{L}}$

(3) $1.5mgL$

18. 如图所示，一根原长为 L 的轻弹簧套在一长为 $3L$ 的光滑直杆 AB 上，其下端固定在杆的 A 端，质量为 m 的小球也套在杆上且与弹簧的上端相连。小球和杆一起绕经过杆 A 端的竖直轴 OO' 匀速转动，且杆与水平面间始终保持 $\theta = 37^\circ$ 角。已知杆处于静止状态时弹簧长度为 $0.5L$ ，重力加速度为 g ， $\sin 37^\circ = 0.6$ ， $\cos 37^\circ = 0.8$ ，求：



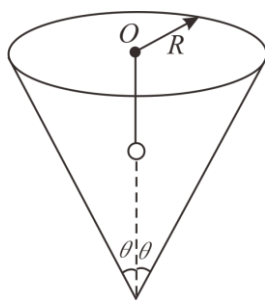
- (1) 弹簧的劲度系数 k .
- (2) 弹簧为原长时, 小球的角速度 ω_0 .
- (3) 当杆的角速度满足什么条件时小球会从 B 端飞走.

【答案】 (1) $\frac{6mg}{5L}$

(2) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15g}{L}}$

(3) 当杆的角速度 $\omega > \frac{5}{4}\sqrt{\frac{g}{L}}$, 弹簧长度大于 $3L$, 小球会从 B 端飞走

19. 如图所示, 内壁光滑的圆锥筒, 圆锥的轴线竖直, 顶角为 $2\theta = 60^\circ$, 底面半径为 R , 在底面圆心 O 处, 系一个轻质细线, 长也为 R , 细线的另一端连一个小球, 小球可视为质点. 现给小球一个初速度, 使其做水平圆周运动, 已知重力加速度为 g , 则:



- (1) 要使小球不碰到锥筒, 小球的线速度不超过多大?
- (2) 要使细线无拉力, 小球的线速度应满足什么条件?

【答案】 (1) $v_{球} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}gR}{6}}$

(2) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}gR}{2}} \leq v_{球} \leq \sqrt{\sqrt{3}gR}$