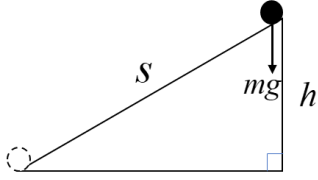


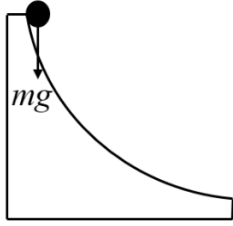
常见力的功的理解与求解

一、重力

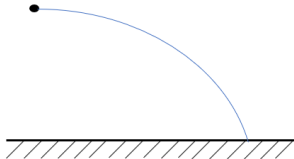
1. 斜面

斜面倾角为θ，高度为h，斜面长为s，小球从顶端滚到底端的过程中重力做了多少功？	
重力是恒力，大小方向都不变，位移明确，可以用直接公式法，但要注意公式中的角度是力和位移的夹角，而不一定就是题目给出的角度，此处力和位移的夹角应该是$\frac{\pi}{2} - \theta$，因此重力做功为： $W = mg \cdot s \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = mg \cdot s \cdot \sin \theta = mgh$ 另：如果是把小球从底端拉到顶端，重力和位移的夹角为$\frac{\pi}{2} + \theta$，则重力做功为： $W = mg \cdot s \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -mgs \sin \theta = -mgh$ 即重力做负功，或小球克服重力做正功。	

2. 圆弧面

圆弧面上端到底端的高度为h，小球从固定圆弧面的上端滑到底端的过程中，重力做了多少功？	
重力是恒力，小球是沿曲面下滑的，整个过程的位移确定但未知，可以做如下考虑： 1. 把圆弧面分割成很多小段，当每小段足够小时，可以近似看作斜面，每个斜面就可以按上一个斜面那样处理，每一段重力做功都是$mg\Delta h$，累加起来就是mgh 2. 如果紧扣功的定义：功是力与物体在力的方向上的位移的乘积，可以直接得出重力做功为mgh	

3. 平抛运动

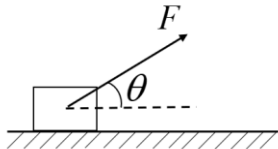
物体从距地面高为 h 的地方水平抛出，到落在地面的过程中，重力做了多少功？	
参考圆弧面的求法，重力做功依然是 mgh	

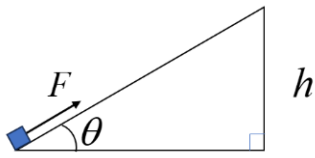
结论：

1. 重力做功只与初末位置的高度差有关，与具体的路径无关。
2. 物体下落，重力做正功；物体上升，重力做负功，或物体克服重力做正功。

二、弹力

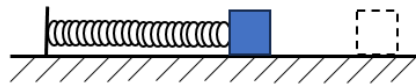
1. 支持力、拉力

物块在恒定拉力 F 的作用下沿水平面向右运动了 x 的距离，在此过程中，拉力和地面的支持力分别做了多少功？	
拉力是恒力，位移也明确，其做功可以直接套用公式： $W_F = F \cdot x \cdot \cos \theta$ 也可以把拉力分解到水平和竖直方向上： $F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta$ $W_F = W_{F_x} + W_{F_y} = F \cos \theta \cdot x \cdot \cos 0^\circ + F \sin \theta \cdot x \cdot \cos 90^\circ = F \cos \theta \cdot x$ 地面的支持力 N 垂直水平面，其做功为： $W_N = N \cdot x \cdot \cos 90^\circ = 0, \quad \text{即支持力不做功。}$	

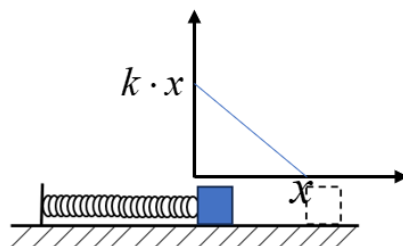
物体在沿斜面的恒力 F 的作用下从底端运动到顶端，此过程中，拉力和支持力分别做了多少功？	
拉力是恒力，位移 $s = \frac{h}{\sin \theta}$，夹角为 0°，直接套用公式： $W_F = F \cdot \frac{h}{\sin \theta} \cdot \cos 0^\circ = \frac{Fh}{\sin \theta}$ 地面的支持力 N 垂直斜面，不做功。	

2. 弹簧弹力

如图，初始弹簧处于压缩状态，释放后，物体在弹力作用下向右运动，至虚线位置，弹簧恢复原长，此过程中，弹簧弹力对物体做了多少功？



此过程中，弹簧弹力在变化，随着物体向右运动，弹力逐渐减小，由于弹簧弹力与其形变量成正比，即 $F = k \cdot \Delta x$ ，而形变量随着物体的位移增大而逐渐减小，且是线性变化，因此可以做出弹簧弹力随物体位移变化的图像：



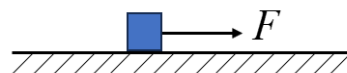
x 是此过程物体的位移，弹簧的初始弹力正好等于 kx ，图像与坐标轴围成的面积即为此过程中弹簧弹力做的功：
$$W = \frac{1}{2} kx \cdot x = \frac{1}{2} kx^2$$

结论：在弹簧一段固定，另一端形变量完全释放的情况下，弹簧弹力做的功 $W = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$

三、摩擦力

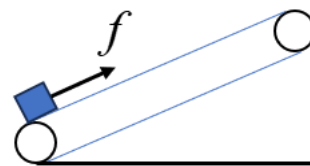
1. 静摩擦力

物体在力 F 的作用下依然处于静止状态，是由于存在静摩擦力 f ，和 F 是一对平衡力。



因为位移是零，因此静摩擦力不做功。

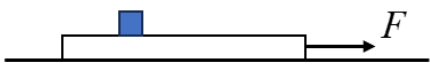
传送带底端到顶端长为 l ，倾角是 θ ，顺时针匀速转动，把物块从底端运到顶端，不考虑初始的加速，传送过程中不打滑，则此过程中静摩擦力做了多少功？



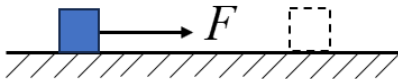
通过受力分析可以求出静摩擦力大小： $f = mg \sin \theta$ ，位移就是 l ，力和位移的夹角是 0° ，直接套用公式有：
$$W_f = mg \sin \theta \cdot l \cdot \cos 0^\circ = mgl \sin \theta$$

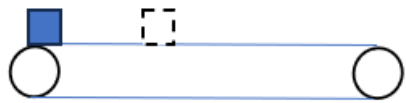
这个过程说明静摩擦力是可以做正功的。

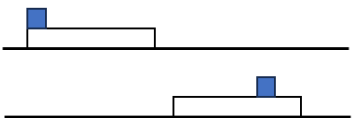
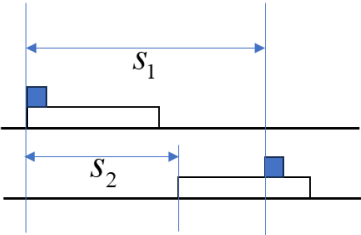
如果传送带是逆时针匀速转动，把物体从顶端运到底端，静摩擦力就是做负功了。

地面光滑，木块在木板上，在拉力 F 的作用下没有相对滑动地一起向右加速运动，运动位移为 x 时，这一对静摩擦力做功情况如何？	
根据牛顿第二定律有： $F = (M + m)a$ $f = ma$ 得出： $f = \frac{m}{M + m} F$ 则静摩擦力对木块做功为： $W_1 = \frac{m}{M + m} Fx$ 静摩擦力对木板做功为： $W_2 = -\frac{m}{M + m} Fx$ 结论：一对静摩擦力可以一个做正功一个做负功，绝对值相等。	

2. 滑动摩擦力

物块在拉力 F 的作用下运动到虚线位置，此过程中滑动摩擦力做了多少功？	
先确定滑动摩擦力： $f = \mu N = \mu mg$，方向向左，位移确定，则功为： $W_f = \mu mg \cdot x \cdot \cos 180^\circ = -\mu mgx$ 滑动摩擦力对物块做负功。	

传动带顺时针匀速转动，物块轻轻放在传动带左端，会经历一个短暂的加速阶段，直至和传送带共速，此过程摩擦力对物块做了多少功？	
加速阶段，根据牛顿第二定律： $f = \mu mg = ma$ 得： $a = \mu g$ 根据 $v^2 = 2ax$ 得： $x = \frac{v^2}{2\mu g}$ 滑动摩擦力做功： $W_f = \mu mg \cdot \frac{v^2}{2\mu g} \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2} mv^2$ 结论：滑动摩擦力对物块做正功。	

如图，地面光滑，长木板 M 初始静止，木块 m 以初速度 v_0 滑上木板，木块与木板间动摩擦因数为 μ，经过一段时间，二者速度达到相等，此过程中滑动摩擦力对木块和木板分别做了多少功？	
滑动摩擦力为 $f = \mu mg$，关键是求出各自的位移。 根据牛顿第二定律：$\mu mg = ma_1$；$\mu mg = Ma_2$ 接下来研究二者的运动，在时间 t 内 木块速度从 v_0 减小到 $v_{\text{共}}$，位移是 s_1，有： $v_{\text{共}} - v_0 = -a_1 t; \quad v_{\text{共}}^2 - v_0^2 = -2a_1 s_1$ 木板速度从 0 增加到 $v_{\text{共}}$，位移是 s_2，有： $v_{\text{共}} = a_2 t; \quad v_{\text{共}}^2 = 2a_2 s_2$ 联立即可求得： $s_1 = \frac{M(M+2m)}{(M+m)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2\mu g}$ $s_2 = \frac{Mm}{(M+m)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2\mu g}$ 则滑动摩擦力对木块做的功为： $W_1 = -\mu mg \cdot s_1 = -\frac{Mm(M+2m)}{2(M+m)^2} v_0^2$ $W_2 = \mu mg \cdot s_2 = \frac{Mm^2}{2(M+m)^2} v_0^2$ 可以看出，摩擦力对木块做负功，对木板做正功，且绝对值不相等。所以一对相互作用力可能一个做正功一个做负功，且大小可以不相等。	

四、大小恒定的空气阻力

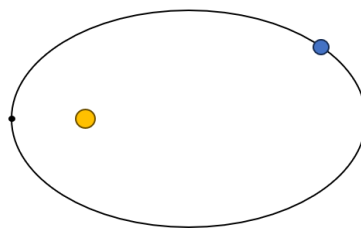
空气阻力的特点是：方向始终和速度方向相反。

因此**空气阻力始终做负功，无论物体是直线运动还是曲线运动，功的大小都与物体的路程有关**，即：

$$W_f = -f \cdot s$$

五、万有引力

涉及到万有引力的场景，一般是绕着中心天体转动，可以是行星绕着恒星，也可以是卫星绕着行星，轨迹基本都是椭圆。讨论万有引力做功，一般是在椭圆轨迹中研究。若右图是一颗人造卫星绕着地球的轨迹，从近地点到远地点的过程中，万有引力做什么功？做了多少功？

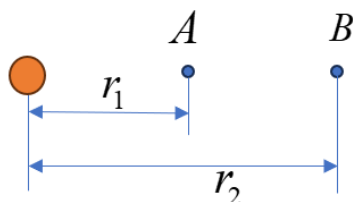


首先分析做什么功：

如果在力的方向上有位移，那么这个力就做了功，万有引力的方向始终指向中心天体，如果在这个方向上有位移，意味着卫星在靠近或者远离地球，从近地点到远地点，是在远离地球，和力的方向所夹的是钝角，因此万有引力做负功。

结论：**靠近中心天体，万有引力做正功；远离中心天体，万有引力做负功。**

做了多少功呢？



如图，卫星从 A 点运动到 B 点，万有引力做的功为：

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} F_{\text{万}} dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = -\left(-\frac{GMm}{r}\right)\bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

这个求解用到积分，因此高中阶段不做要求，如果题目用到会直接给出。